Método de los Coeficientes Indeterminados como Algoritmo de Integración

En este recurso vamos a presentar, tras una breve explicación, un algoritmo general para la integración de una función de la cual sólo conocemos su valor en una serie de puntos que tenemos en el soporte. Para ello, partimos de un polinomio interpolador de dicha función de cualquier grado $k \in \{0,1,\dots,n\}$, con n + 1 el número de puntos en el soporte. Métodos tan famosos como los de Newton-Cotes son casos concretos de este método que procedemos a explicar.

Nuestro objetivo principal es encontrar los coeficientes $c_j \in \mathbb{R}$ tal que

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{j=0}^{n} c_j\, f(s_j)$$

Para ello, vimos en teoría, que tomando cada punto del soporte como $s_j = a + \theta_j h$ y la diferencia entre el primero y el último como $b - a = \lambda h$ y partiendo de la Fórmula de la Cuadratura:

$$\int_a^b (x-a)^k\,dx = \sum_{j=0}^{n} c_j\,(s_j - a)^k$$

Nos queda la siguiente generalización $\forall\, k \in \{0,1,\dots,n\}$

$$\sum_{j=0}^{n} c_j\,\theta_j^k = \frac{\lambda^{k+1}h}{k+1}$$

A partir de la cual podemos plantear un sistema de ecuaciones para hallar los coeficientes indeterminados:

$$\overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \theta_0 & \theta_1 & \theta_2 & \cdots & \theta_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta_0^{k-1} & \theta_1^{k-1} & \theta_2^{k-1} & \cdots & \theta_n^{k-1} \\ \theta_0^{k} & \theta_1^{k} & \theta_2^{k} & \cdots & \theta_n^{k} \\ \theta_0^{k+1} & \theta_1^{k+1} & \theta_2^{k+1} & \cdots & \theta_n^{k+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta_0^{n} & \theta_1^{n} & \theta_2^{n} & \cdots & \theta_n^{n} \end{bmatrix}}^{(n+1)\times(n+1),\ \text{dependiente de las posiciones del soporte}} \overbrace{\begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{k-1} \\ c_k \\ c_{k+1} \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}}^{(n+1)\ \text{coefientes}} = \begin{bmatrix} \lambda \\ \lambda^2/2 \\ \vdots \\ \lambda^k/k \\ \lambda^{k+1}/k+1 \\ \lambda^{k+2}/k+2 \\ \vdots \\ \lambda^{n+1}/n+1 \end{bmatrix} h$$

Además, podemos simplificar este sistema de ecuaciones calculándolo directamente desde el soporte, ya que el sistema de ecuaciones resultante será equivalente si tenemos en cuenta que

$$\int_a^b x^k \, dx = \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{k + 1}$$

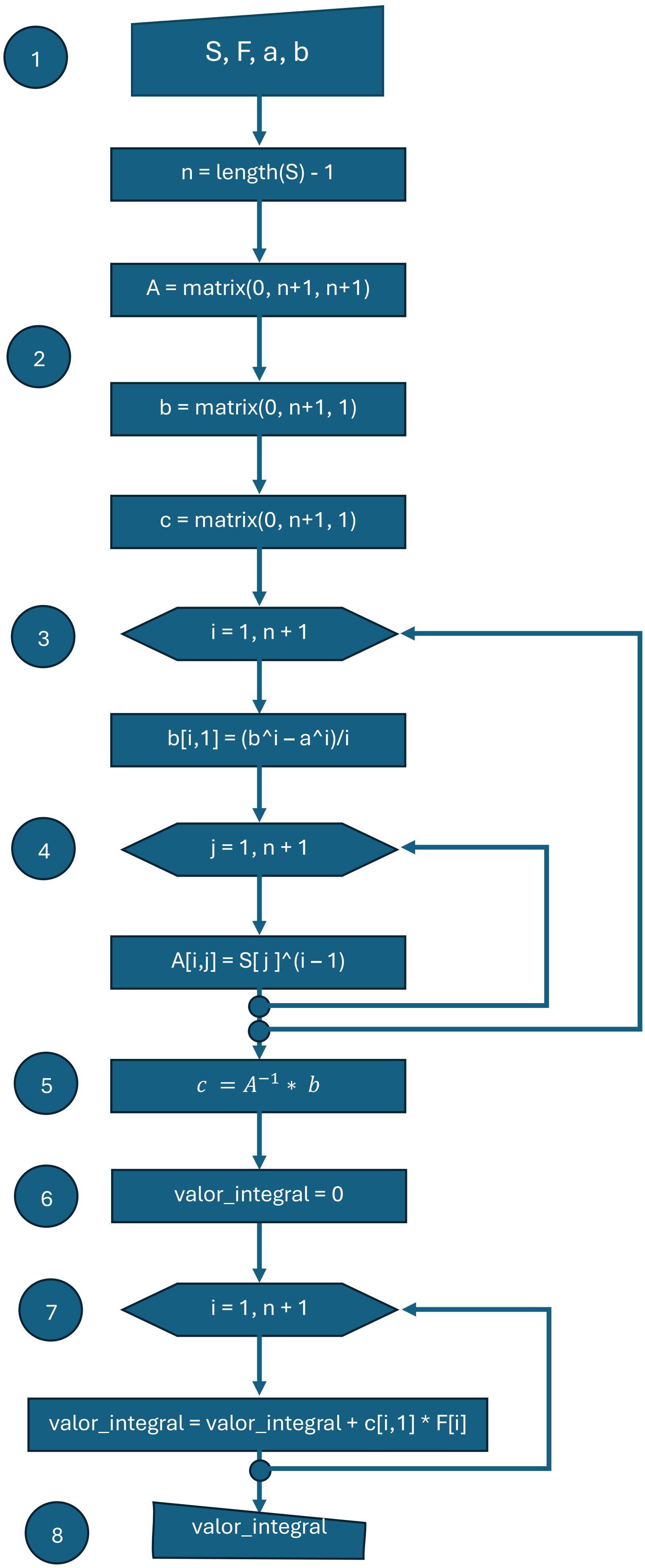
Y que la condición de exactitud equivalente sería

$$\int_a^b x^k \, dx = \sum_{j=0}^{n} c_j s_j^k$$

Por lo tanto, nos queda el siguiente sistema de ecuaciones simplificado a resolver:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ s_0 & s_1 & s_2 & \cdots & s_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_0^{k-1} & s_1^{k-1} & s_2^{k-1} & \cdots & s_n^{k-1} \\ s_0^k & s_1^k & s_2^k & \cdots & s_n^k \\ s_0^{k+1} & s_1^{k+1} & s_2^{k+1} & \cdots & s_n^{k+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_0^n & s_1^n & s_2^n & \cdots & s_n^n \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{k-1} \\ c_k \\ c_{k+1} \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}}_{c} = \underbrace{\begin{bmatrix} b - a \\ (b^2 - a^2)/_2 \\ \vdots \\ (b^k - a^k)/_k \\ (b^{k+1} - a^{k+1})/_{k+1} \\ (b^{k+2} - a^{k+2})/_{k+2} \\ \vdots \\ (b^{n+1} - a^{n+1})/_{n+1} \end{bmatrix}}_{b}$$

Planteamos ahora el algoritmo para integrar de forma interpoladora una función y obtener $\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{j=0}^{n} c_j f(s_j)$. Primero calcularemos los coeficientes indeterminados a partir del sistema de ecuaciones anteriormente planteado y para el cual sólo necesitamos saber el soporte $S = s_0, s_1, \dots, s_n$ y los límites de integración a y b, y una vez que tengamos estos coeficientes, calcularemos la integral en sí, utilizando los valores de la función f sobre los puntos del soporte.


1
S, F, a, b
n = length(S) - 1
A = matrix(0, n+1, n+1)
2
b = matrix(0, n+1, 1)
c = matrix(0, n+1, 1)
3
i = 1, n + 1
b[i,1] = (b^i – a^i)/i
4
j = 1, n + 1
A[i,j] = S[j]^(i – 1)
5
$c = A^{-1} * b$
6
valor_integral = 0
7
i = 1, n + 1
valor_integral = valor_integral + c[i,1] * F[i]
8
valor_integral

Explicación del Algoritmo

1. Necesitamos como parámetros de entrada un vector S con los puntos del soporte, un vector F con los valores de la función f sobre los puntos del soporte S y los límites de integración a y b.
2. Sacamos la variable n como el número de puntos que tiene el soporte menos 1. Inicializamos la matriz A como una matriz cuadrada (n + 1) x (n + 1) y los vectores b y c como vectores columna 1 x (n + 1).
3. Abrimos un primer bucle for que irá desde 1 hasta n + 1 para recorrer todas las columnas de b y todas las filas de A. Una vez dentro, calculamos los elementos de b según hemos visto en la teoría de la página 2.
4. Entramos en el bucle anidado en el que el índice j toma los valores desde 1 a n + 1 para recorrer las columnas de A dentro de cada fila. Dentro de este bucle vamos calculando los elementos de la matriz A según lo visto en la teoría del la página 2.
5. Una vez obtenidos A y b, ya podemos calcular el vector columna de coeficientes indeterminados c multiplicando la inversa de A por el vector columna b.
6. Por último, vamos a calcular el valor de la integral de tipo interpoladora, mediante el sumatorio $\sum_{j=0}^{n} c_j\, f\left(s_j\right)$. Para ello, inicializamos dicho valor a 0.
7. Seguidamente, abrimos un bucle for que irá recorriendo todos los valores de los vectores c y F, por lo que, tomará los enteros desde 1 a n + 1 e irá sumando a la variable valor_integral cada valor F[i] = $f(s_i)$ ponderado por el correspondiente coeficiente c_j, con $j \in \{1, \ldots, n+1\}$.
8. Devolvemos finalmente el valor de la integral, valor_integral.