FÓRMULAS TODO ALGORÍTMIA

Interpolación

1. Sistemas de ecuaciones
2. Bases de Lagrange
3. Newton: Uso de diferencias divididas

Derivación

1. Bases de Lagrange: Derivadas de los polinomios base para aproximar derivadas de f(x)
2. Newton: Uso de diferencias divididas para calcular derivadas aproximadas.
3. Método de coeficientes indeterminados: Para obtener los coeficientes por medio de un sistema.

Integración

1. Lagrange
2. Newton
3. Coeficientes indeterminados
4. Newton-Cotes

Interpolación por tramos

1. Sistema de ecuaciones: Polinomios por segmentos con condiciones de continuidad.
2. Newton: Polinomios por tramos usando diferencias divididas.
3. Bases de Lagrange: Polinomios por tramos mediante bases específicas para cada intervalo.

Integración por tramos

INTERPOLACIÓN

1) SISTEMA DE ECUACIONES

$$P(s) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \cdots + a_n s^n$$

No es más que resolver un sistema de ecuaciones que se puede resolver con la matriz inversa (no práctico) o despejando matemáticamente (Gauss, sustitución, etc).

- Cada s es un punto de soporte.
- El polinomio es de grado n-1, siendo n el número de puntos de soporte.

De forma genérica tenemos la siguiente expresión:

$$\begin{bmatrix} 1 & s_0 & s_0^2 & \dots & s_0^n \\ 1 & s_1 & s_1^2 & \dots & s_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & s_n & s_n^2 & \dots & s_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

2) BASES DE LAGRANGE

$$P(x) = \sum_{i=1}^{n} f(s_i) \cdot L_i(x) \qquad L_i(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x - s_j}{s_i - s_j}$$

Este método no es más que calcular tantos Li como puntos de soporte te den y multiplicarlo por su respectivo punto, de la forma:

$$P(x) = f(s_1) \cdot L_1(x) + f(s_2) \cdot L_2(x) + f(s_3) \cdot L_3(x)$$

3) NEWTON

$$P(x) = f[s_0] + f[s_0, s_1](x - s_0) + f[s_0, s_1, s_2](x - s_0)(x - s_1) +$$
$$+ f[s_0, s_1, \ldots, s_n](x - s_0)(x - s_1)\ldots(x - s_{n-1}).$$

Este método es uno de los más cómodos para calcular el polinomio interpolador pues es muy sistemático. Como se observa la fórmula sigue un patrón sencillo de entender, por lo que la única complicación que podría haber es calcular las **diferencias divididas,** lo cual resolvemos por el método de la tabla

Tabla para calcular las diferencias divididas:

s_0	$f[s_0]$	$f[s_0, s_1]$	$f[s_0, s_1, s_2]$	$f[s_0, s_1, s_2, s_3]$	$f[s_0, s_1, s_2, s_3, s_4]$
s_1	$f[s_1]$	$f[s_1, s_2]$	$f[s_1, s_2, s_3]$	$f[s_1, s_2, s_3, s_4]$	0
s_2	$f[s_2]$	$f[s_2, s_3]$	$f[s_2, s_3, s_4]$	0	0
s_3	$f[s_3]$	$f[s_3, s_4]$	0	0	0
s_4	$f[s_4]$	0	0	0	0

Donde,

$$f[s_0, s_1, s_2, \cdots, s_n] = \frac{f[s_1, s_2, \cdots, s_n] - f[s_0, s_1, s_2, \cdots, s_{n-1}]}{s_n - s_0}$$

Ejemplo visto en clase:

$s_0 = 0$	$f[s_0] = 0$	$f[s_0, s_1] = \frac{f[s_1]-f[s_0]}{s_1 - s_0} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}-0}{\frac{\pi}{4}-0} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}$	$f[s_0, s_1, s_2] = \frac{f[s_1, s_2]-f[s_0, s_1]}{s_2 - s_0} = \frac{8(1-\sqrt{2})}{\pi^2}$
$s_1 = \frac{\pi}{4}$	$f[s_1] = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$f[s_1, s_2] = \frac{f[s_2]-f[s_1]}{s_2 - s_1} = \frac{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}} = \frac{2(2-\sqrt{2})}{\pi}$	0
$s_2 = \frac{\pi}{2}$	$f[s_2] = 1$	0	0

DERIVACIÓN

1) BASES DE LAGRANGE

$$f'(x^*) \approx P'(x^*) = \sum_{i=0}^{n} f(s_i)L_i'(x^*).$$

- El **polinomio** que creemos será **específico para un punto x*** y el ***resultado final será un número***.

1. Calculamos Li con la misma fórmula que en interpolación
2. Derivamos el resultado tantas veces como nos pida el ejercicio (1, 2,...k)
3. Valoramos el polinomio derivado en el punto x*
4. Usamos la misma expresión, pero usando la derivada:

$$P'(x) = f(s_0)L_0'(x) + f(s_1)L_1'(x) + f(s_2)L_2'(x)$$

Pd: Li' (x*) también se puede expresar como Ci, pero es exactamente lo mismo.

2) MÉTODO DE NEWTON

Este método es tan sencillo como:

1. Calcular polinomio interpolador
2. Derivarlo
3. Valorar el punto en el polinomio derivado, lo que no da un número concreto

- OJO: si obtengo un polinomio de grado 1, podre hacer la primera derivada; para un polinomio de grado 2, la primera y la segunda, etc.

3) Método de los coeficientes indeterminados

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \theta_0 & \theta_1 & \theta_2 & \cdots & \theta_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta_0^{k-1} & \theta_1^{k-1} & \theta_2^{k-1} & \cdots & \theta_n^{k-1} \\ \theta_0^{k} & \theta_1^{k} & \theta_2^{k} & \cdots & \theta_n^{k} \\ \theta_0^{k+1} & \theta_1^{k+1} & \theta_2^{k+1} & \cdots & \theta_n^{k+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta_0^{n} & \theta_1^{n} & \theta_2^{n} & \theta_n^{n} & \theta_n^{n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{k-1} \\ c_k \\ c_{k+1} \\ \vdots \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ k! \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \frac{1}{h^k}$$

$$f^{(k}(x^*) \approx \sum_{i=0}^{n} c_i \cdot f(s_i)$$

Este caso calculamos las Ci con un sistema, para después introducirlas en la fórmula de la derecha.

Dado unos puntos de soporte S0, S1, S2, S3 y el grado de la derivada k=1

1. Expresamos el soporte de la forma Si = x* + h x Oi, donde:
   - x* es el punto a valorar
   - Si es un punto de soporte
   - h es la longitud característica
   - Oi son los valores es el valor que se multiplica por h para y se suma al punto a valorar para dar el valor del punto de soporte escogido. Con este ejemplo se ve más claro:

$$s_0 = 6 = 6.5 + 0.5\ \theta_0 \quad \rightarrow \quad \theta_0 = -1$$

2. Resolviendo matemáticamente, obtenemos C0, C1, C2 y C3.

- NOTA: Este método es útil en R, pero en el examen escrito resulta demasiado complejo resolver un sistema de ecuaciones o realizar la matriz inversa cuando hay más de 3 puntos de soporte.

INTEGRACIÓN

1) INTEGRANDO EL POLINOMIO INTERPOLADOR

- ***LAGRANGE:***
  - Como siempre, este método sigue la misma fórmula, siendo en este caso Cj la integral del polinomio Li.

Si conocemos el polinomio interpolador de f (x):

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{j=0}^{n} \int_a^b \underbrace{f(s_i)}_{\text{no depende de x}} \mathrm{L}_j(x)\,dx = \sum_{j=0}^{n} f(s_i) \int_a^b \mathrm{L}_j(x)dx$$

Por lo tanto:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{n} c_j \cdot f(s_j)$$

Siendo los coeficientes c_j

$$c_j = \int_a^b \mathrm{L}_j(x)dx$$

- ***NEWTON:***
  - Este método no es más que calcular el polinomio interpolador mediante la tabla y después integrarlo en el intervalo pedido.

2) A PARTIR DE LA FÓRMULA DE CUADRATURA

- NOTA: Si quiere saberse el fundamento teórico de la fórmula véase el recurso "Teoría Integración"

1. COEFICIENTES INDETERMINADOS:

- Calculamos los coeficientes indeterminados Cj para usarlos en la misma fórmula que con Lagrange. En la matriz, n es el número de puntos de soporte y k el grado del polinomio que calculamos.
- NOTA: útil para R, pero demasiado complejo para un examen escrito.

$$\overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ s_0 & s_1 & s_2 & \cdots & s_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_0^{k-1} & s_1^{k-1} & s_2^{k-1} & \cdots & s_n^{k-1} \\ s_0^{k} & s_1^{k} & s_2^{k} & \cdots & s_n^{k} \\ s_0^{k+1} & s_1^{k+1} & s_2^{k+1} & \cdots & s_n^{k+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_0^{n} & s_1^{n} & s_2^{n} & \cdots & s_n^{n} \end{bmatrix}}^{(n+1)\times(n+1),\ \text{dependiente de las posiciones del soporte}} \overbrace{\begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{k-1} \\ c_k \\ c_{k+1} \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}}^{\substack{(n+1) \\ \text{coefientes}}} = \begin{bmatrix} b-a \\ (b^2-a^2)/2 \\ \vdots \\ (b^k-a^k)/k \\ (b^{k+1}-a^{k+1})/k+1 \\ (b^{k+2}-a^{k+2})/k+2 \\ \vdots \\ (b^{n+1}-a^{n+1})/n+1 \end{bmatrix}$$

2. NEWTON-COTES

- ***Cerrado:*** Incluye los puntos de los extremos a y b

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{D}\sum_{j=0}^{n} \alpha_j f(s_j) \qquad s_j = a + jh \ \ \forall j = 0 \dots n \qquad h = \frac{b-a}{n}$$

n	α_j	D	Nombre
1	1 1	2	Trapecio
2	1 4 1	6	Simpson
3	1 3 3 1	8	Regla del 3/8
4	7 32 12 32 7	90	Milne
5	19 75 50 50 75 19	288	
6	41 216 27 272 27 216 41	840	Weddle

Si multiplicamos alpha por la distancia entre a y b y dividimos esto entre D, obtendremos el coeficiente interpolador que corresponde a dicho alpha.

- **Abierto:** No incluye los extremos a y b

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{D}\sum_{j=0}^{n} \alpha_j f(s_j) \qquad s_j = a + jh \ \ \forall j = 1 \dots n+1 \qquad h = \frac{b-a}{n+2}$$

n	α_j	D	Nombre
0	1	1	Punto medio
1	1 1	2	
2	2 -1 2	3	
3	11 1 1 11	24	

INTERPOLACIÓN POR TRAMOS

Al interpolar por tramos lo que estamos haciendo es reducir el reducir el fenómeno de Runge. Esto se consigue tan fácilmente como dividiendo los puntos de soporte en intervalos (con al menos 2 puntos de soporte cada uno), es decir, generamos un polinomio pi (x) por intervalo [Si, S1+m] y luego los unimos en una función v (x).

1) SISTEMA DE ECUACIONES

Partiendo de que en el enunciado del ejercicio nos dan cuantos puntos pertenecen a cada polinomio, usamos el primer método utilizado en este recurso para formar cada polinomio.

En la fórmula, n representa numero de soporte en el intervalo m.

- OJO: Dos puntos no pueden pertenecer al mismo polinomio aunque lo usemos para calcularlos, por es importante poner bien los signos < y <=, así como indicar 0 en el resto.

$$v(x) = \begin{cases} a_0^{(1)} + a_1^{(1)}x + a_2^{(1)}x^2 + \cdots + a_{n_1}^{(1)}x^{n_1} & \text{si } s_0^{(1)} \le x \le s_{n_1}^{(1)} \\ a_0^{(2)} + a_1^{(2)}x + a_2^{(2)}x^2 + \cdots + a_{n_2}^{(n)}x^{n_2} & \text{si } s_0^{(2)} < x \le s_{n_2}^{(2)} \\ \cdots & \\ a_0^{(m)} + a_1^{(m)}x + a_2^{(m)}x^2 + \cdots + a_{n_m}^{(m)}x^{n_m} & \text{si } s_0^{(m)} < x \le s_{n_m}^{(m)} \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

2) NEWTON

Estamos en un caso similar al anterior, calculamos cada polinomio, esta vez con el el método de Newton (tabla de diferencias divididas), y después los incorporamos en una función v (x).

j indexa el intervalo

$$v^{(j)}(x) = f\left[s_0^{(j)}\right] + \sum_{k=1}^{n_j} f\left[s_0^{(j)}, s_1^{(j)}, \ldots, s_k^{(j)}\right] \prod_{i=0}^{k-1} \left(x - s_i^{(j)}\right)$$

k indexa las muestras del intervalo

$$f\left[s_0^{(j)}, s_1^{(j)}, \cdots, s_k^{(j)}\right] = \frac{f\left[s_1^{(j)}, \cdots, s_k^{(j)}\right] - f\left[s_0^{(j)}, \cdots, s_{k-1}^{(j)}\right]}{s_k^{(j)} - s_0^{(j)}}$$

	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	
$s_0^{(j)}$	$f\left[s_0^{(j)}\right]$	$f\left[s_0^{(j)}, s_1^{(j)}\right]$	$f\left[s_0^{(j)}, s_1^{(j)}, s_2^{(j)}\right]$	$f\left[s_0^{(j)}, s_1^{(j)}, s_2^{(j)}, s_3^{(j)}\right]$	$i=0$
$s_1^{(j)}$	$f\left[s_1^{(j)}\right]$	$f\left[s_1^{(j)}, s_2^{(j)}\right]$	$f\left[s_1^{(j)}, s_2^{(j)}, s_3^{(j)}\right]$	0	$i=1$
$s_2^{(j)}$	$f\left[s_2^{(j)}\right]$	$f\left[s_2^{(j)}, s_3^{(j)}\right]$	0	0	$i=2$
$s_3^{(j)}$	$f\left[s_3^{(j)}\right]$	0	0	0	$i=3$

3) Bases de Lagrange

Obteniendo los polinomios que forman v(x) obtenemos la base general:

$$v(x) = \sum_{l=0}^{n} f(s_l)\, \varphi_l(x)$$

Partimos todo el tramo que hay que interpolar en trozos, en los que cada uno tendra su base φ, que siempre son n-1 (siendo n el número de puntos de soporte). La manera de calcular la base depende de la posición de cada muestra, siendo:

muestra inicial: $s_0^{(1)}$

$$\varphi_0 = \varphi_0^{(1)} = \begin{cases} \mathrm{L}_0^{(1)}(x) & \text{si } s_0^{(1)} \le x \le s_{n_1}^{(1)} \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

muestra de enlace: $s_{n_j}^{(j)} = s_0^{(j+1)}$

$$\varphi_l = \varphi_k^{(j)} = \varphi_0^{(j+1)} = \begin{cases} \mathrm{L}_{n_j}^{(j)}(x) & \text{si } s_0^{(j)} \le x \le s_{n_j}^{(j)} \\ \mathrm{L}_0^{(j+1)}(x) & \text{si } s_0^{(j+1)} \le x \le s_{n_j}^{(j+1)} \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

muestra dentro del intervalo j
(no es de enlace: $s_k^{(j)}$ con $k \neq n_j$ y $k \neq 0$)

$$\varphi_l = \varphi_k^{(j)} = \begin{cases} \mathrm{L}_k^{(j)}(x) & \text{si } s_0^{(j)} \le x \le s_{n_j}^{(j)} \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

muestra final: $s_n = s_{nm}^{(m)}$

$$\varphi_n = \varphi_{n_m}^{(m)} = \begin{cases} \mathrm{L}_{n_m}^{(m)}(x) & \text{si } s_0^{(m)} \le x \le s_{n_m}^{(m)} \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

- Primera muestra: calculando L0 con la fórmula normal de las bases de Lagrange (según cuantos puntos de soporte tenga el intervalo variará la ecuación):

$$L_0(x) = \frac{x - S_1}{S_0 - S_1} \cdot \frac{x - S_2}{S_0 - S_2} \cdot \frac{x - S_3}{S_0 - S_3}$$

- Muestra dentro del intervalo j: calcularemos Ln (x), que dependerá del número de muestra que hayamos cogido. Por ejemplo, si es la s1, se calcularía así:

$$L_1(x) = \frac{x - S_0}{S_1 - S_0} \cdot \frac{x - S_2}{S_1 - S_2} \cdot \frac{x - S_3}{S_1 - S_3}$$

- Muestra de enlace: de esta muestra obtendremos dos polinomios interpoladores, una perteneciente al primer intervalo y el otro perteneciente al siguiente intervalo. El primer polinomio lo formaremos mediante $L_{n_j}^{(j)}(x)$, polinomio de Lagrange asociado al tramo j en el intervalo $[s_0^{(j)}, s_{n_j}^{(j)}]$. El segundo polinomio lo formaremos mediante $L_0^{(j+1)}(x)$, polinomio de Lagrange asociado al tramo j en el intervalo $[s_0^{(j+1)}, s_{n_j}^{(j+1)}]$.

- Muestra final: en este caso en el intervalo $[s_0^{(m)}, s_{n_m}^{(m)}]$ el polinomio interpolador se calcula mediante $L_{n_m}^{(m)}(x)$.

INTEGRACIÓN POR TRAMOS

La **integración por tramos** se usa cuando un intervalo no se puede integrar con una sola integrar, es decir, ese intervalo se divide en diferentes partes más pequeñas que son integradas independientemente para luego juntarlos, obteniendo el valor total de la integral del intervalo completo.

Si al hacer la partición las fronteras de los intervalos coinciden sabemos que:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{j=1}^{m} \int_{s_0^{(j)}}^{s_{n_j}^{(j)}} f(x)dx \approx \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=0}^{n_j} c_k^{(j)} f\left(s_k^{(j)}\right)$$

1) BASES DE LAGRANGE

La manera de integrar depende del tipo de intervalos y el número de valores que tenga el intervalo.

- Número de intervalos:
  - Un intervalo:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b p_n(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n} f(s_i) \int_a^b L_k(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n} c_j \cdot f(s_j)$$

  - m intervalos de orden nj:

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{k=0}^{n_j} c_k^{(j)} f\left(s_k^{(j)}\right)$$ siendo ck-> $$c_k = \int_{s_0^{(j)}}^{s_{n_j}^{(j)}} \mathrm{L}_k^{(j)}(x)\,dx$$

- Número de valores del intervalo:
  - **Dos valores:**

$$c_0^{(j)} = \frac{s_1^{(j)} - s_0^{(j)}}{2} \qquad c_1^{(j)} = \frac{s_1^{(j)} - s_0^{(j)}}{2}$$

FÓRMULA DEL TRAPECIO

- **Tres valores e el intervalo Ij:**

$$c_0^{(j)} = \int_{s_0^{(j)}}^{s_2^{(j)}} L_0^{(j)}(x)\,dx = \int_{s_0^{(j)}}^{s_2^{(j)}} \frac{\left(x - s_1^{(j)}\right)\left(x - s_2^{(j)}\right)}{\left(s_0^{(j)} - s_1^{(j)}\right)\left(s_0^{(j)} - s_2^{(j)}\right)}dx = \frac{\left(s_2^{(j)} - s_1^{(j)}\right)\left(s_2^{(j)} - s_0^{(j)}\right)}{3\left(s_0^{(j)} - s_1^{(j)}\right)}$$

$$c_1^{(j)} = \int_{s_0^{(j)}}^{s_2^{(j)}} L_1^{(j)}(x)\,dx = \int_{s_0^{(j)}}^{s_2^{(j)}} \frac{\left(x - s_0^{(j)}\right)\left(x - s_2^{(j)}\right)}{\left(s_1^{(j)} - s_1^{(j)}\right)\left(s_1^{(j)} - s_2^{(j)}\right)}dx = \frac{\left(s_0^{(j)} - s_2^{(j)}\right)\left(\left(s_0^{(j)}\right)^2 + s_0^{(j)}s_2^{(j)} + \left(s_2^{(j)}\right)^2\right)}{6\left(s_1^{(j)} - s_0^{(j)}\right)\left(s_1^{(j)} - s_2^{(j)}\right)}$$

$$c_2^{(j)} = \int_{s_0^{(j)}}^{s_2^{(j)}} L_2^{(j)}(x)\,dx = \int_{s_0^{(j)}}^{s_2^{(j)}} \frac{\left(x - s_0^{(j)}\right)\left(x - s_1^{(j)}\right)}{\left(s_2^{(j)} - s_0^{(j)}\right)\left(s_2^{(j)} - s_1^{(j)}\right)}dx = \frac{2\left(\left(s_2^{(j)}\right)^2 + \left(s_0^{(j)}\right)^2 + 3s_1^{(j)}\left(s_2^{(j)} - s_0^{(j)}\right)\right)}{6\left(s_2^{(j)} - s_1^{(j)}\right)}$$

  - Tres valores uniformemente distribuidos:

En este caso especial podemos aplicar la fórmula de Simpson, que es la siguiente:

$$c_0^{(j)} = \frac{\left(s_2^{(j)} - s_0^{(j)}\right)}{6} \qquad c_1^{(j)} = \frac{4\left(s_2^{(j)} - s_0^{(j)}\right)}{6} \qquad c_2^{(j)} = \frac{\left(s_2^{(j)} - s_0^{(j)}\right)}{6}$$

FÓRMULA DE SIMPSON

- **De orden mayor:**
  - Soporte equiespaciado:

En este caso emplearemos el método de Newton-Cotes (intervalos cerrados):

$$\int_{s_0^{(j)}}^{s_{n_j}^{(j)}} f(x)dx \approx \frac{s_{n_j}^{(j)} - s_0^{(j)}}{D_{n_j}} \sum_{k=0}^{n_j} \alpha_k^{(j)} f(s_k^{(j)})$$

n	α_k	D_n	Nombre
1	1 1	2	Trapecio
2	1 4 1	6	Simpson
3	1 3 3 1	8	Regla del 3/8
4	7 32 12 32 7	90	Milne
5	19 75 50 50 75 19	288	
6	41 216 27 272 27 216 41	840	Weddle

Cada intervalo lo haremos independientemente, usando los datos de la tabla y sustituyéndolos en la fórmula.

- Soporte no equiespaciado:

En este otro caso emplearemos el método de los coeficientes indeterminados:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=0}^{n_j} c_k^{(j)} f(s_k^{(j)})$$

Como siempre, debemos calcular los ck-s de cada intervalo, que lo haremos mediante la siguiente matriz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ s_0^{(j)} & s_1^{(j)} & s_2^{(j)} & \cdots & s_{n_j}^{(j)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \left(s_0^{(j)}\right)^{k-1} & \left(s_1^{(j)}\right)^{k-1} & \left(s_2^{(j)}\right)^{k-1} & \ddots & \left(s_{n_j}^{(j)}\right)^{k-1} \\ & & & \cdots & \\ \left(s_0^{(j)}\right)^{k} & \left(s_1^{(j)}\right)^{k} & \left(s_2^{(j)}\right)^{k} & \cdots & \left(s_{n_j}^{(j)}\right)^{k} \\ \left(s_0^{(j)}\right)^{k+1} & \left(s_1^{(j)}\right)^{k+1} & \left(s_2^{(j)}\right)^{k+1} & \ddots & \left(s_{n_j}^{(j)}\right)^{k+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \left(s_0^{(j)}\right)^{n_j} & \left(s_1^{(j)}\right)^{n_j} & \left(s_2^{(j)}\right)^{n_j} & \cdots & \left(s_{n_j}^{(j)}\right)^{n_j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0^{(j)} \\ c_1^{(j)} \\ \vdots \\ c_{k-1}^{(j)} \\ c_k^{(j)} \\ c_{k+1}^{(j)} \\ \vdots \\ c_{n_j}^{(j)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{n_j}^{(j)} - s_0^{(j)} \\ \left(\left(s_{n_j}^{(j)}\right)^2 - \left(s_0^{(j)}\right)^2\right) \big/ 2 \\ \vdots \\ \left(\left(s_{n_j}^{(j)}\right)^k - \left(s_0^{(j)}\right)^k\right) \big/ k \\ \left(\left(s_{n_j}^{(j)}\right)^{k+1} - \left(s_0^{(j)}\right)^{k+1}\right) \big/ k+1 \\ \left(\left(s_{n_j}^{(j)}\right)^{k+2} - \left(s_0^{(j)}\right)^{k+2}\right) \big/ k+2 \\ \vdots \\ \left(\left(s_{n_j}^{(j)}\right)^{n_j+1} - \left(s_0^{(j)}\right)^{n_j+1}\right) \big/ n+1 \end{bmatrix}$$