RECURSO T6: INTERPOLACION POR TRAMOS

La interpolación por tramos es un método que se utiliza para aproximar una función desconocida a partir de un conjunto de puntos dados. Este método se utiliza cuando el número de puntos de soporte es elevado y oscilante, y la representación de la función es continua.

En vez de usar una única fórmula que describa toda la función, la interpolación por tramos construye varias funciones simples, cada una válida en un intervalo específico entre los puntos. Es decir, se divide el intervalo total en subintervalos (o tramos) y se crea una función para cada subintervalo que pase por los puntos dados en ese tramo.

El objetivo de la interpolación por tramos es encontrar una función simple (un polinomio) que pase por todos los puntos dados en su respectivo intervalo y sea lo más suave posible en las uniones entre tramos.

Hay dos tipos de interpolación por tramos:

- Interpolación lineal o por tramos de primer grado
- Interpolación cuadrática o por tramos de segundo grado

INTERPOLACIÓN POR TRAMOS DE PRIMER GRADO

En este caso, cada tramo es una línea recta que conecta dos puntos consecutivos. Es el método más simple y rápido de implementar.

Por ejemplo, si tenemos 4 puntos de soporte, la función interpoladora tendrá tres intervalos, y la función será de la forma:

$$P(x) = \begin{cases} P_1(x), x \in [x_1, x_2] \\ P_2(x), x \in [x_2, x_3] \\ P_3(x), x \in [x_3, x_4] \end{cases}$$

Donde x son los puntos de soporte y las P(x) son las funciones lineales en cada intervalo

Para obtener las funciones lineales de los diferentes intervalos podemos seguir dos métodos:

- ***Método de los sistemas de ecuaciones***

En la interpolación lineal por tramos, el polinomio P(x) en un tramo [x_i, x_i+1] tiene la forma: P(x)=a_i + b_ix. Cada tramo tiene un polinomio distinto, y necesitamos calcular a_i y b_i para cada intervalo. Para ello resolveremos el siguiente sistema de ecuaciones, en el que conocemos los valores *x* y *f*.

$$\begin{cases} P_i(x_i) = a_i + b_i x_i = f_i \\ P_i(x_{i+1}) = a_i + b_i x_{i+1} = f_{i+1} \end{cases}$$

Si resolvemos el sistema obtenemos que a y b son iguales a:

$$b_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{x_{i+1} - x_i} \quad a_i = f_i - \frac{f_{i+1} - f_i}{x_{i+1} - x_i}$$

- ***Método de las funciones de base***

El objetivo para conseguir los polinomios en cada intervalo es calcular las funciones de base, las cuales deben cumplir que si el valor interpolado coincide con el punto del soporte para el cual estamos calculando la función deben valer 1, mientras los otros puntos del soporte tomaran valor 0: $P_i\,(x_i)=1$ y $P_i\,(x_j)=0$

Para el primer punto del intervalo la función de base será:

$$\varphi_0 = \begin{cases} \dfrac{x - s_1}{s_0 - s_1} & \text{si } x \in [s_0, s_1] \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Para un punto intermedio la función de base será:

$$\varphi_j = \begin{cases} \dfrac{x - s_{j-1}}{s_j - s_{j-1}} & \text{si } x \in [s_{j-1}, s_j] \\ \dfrac{x - s_{j+1}}{s_j - s_{j+1}} & \text{si } x \in [s_j, s_{j+1}] \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Para el último punto la función de base será:

$$\varphi_m = \begin{cases} \dfrac{x - s_{m-1}}{s_m - s_{m-1}} & \text{si } x \in [s_{m-1}, s_m] \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Para obtener el valor interpolado, simplemente tenemos que multiplicar el valor obtenido de la función de base de cada punto por el valor conocido que toma la función en dicho punto:

$$v(x) = \sum_{j=0}^{m} f(s_j)\,\varphi_j(x) = f(s_0)\,\varphi_0(x) + f(s_1)\,\varphi_1(x) + \cdots + f(s_j)\,\varphi_j(x) + \cdots + f(s_m)\,\varphi_m(x)$$

INTERPOLACION POR TRAMOS DE SEGUNDO GRADO

Este método es útil únicamente cuando se dispone de un número impar de puntos de soporte. En este caso, los puntos se agrupan en intervalos de tres, y cada función de base genera secciones de una parábola en cada intervalo. Si se tienen n puntos de soporte, se crean (n−1) /2 intervalos. Si el número es par, se puede hacer un polinomio de grado 1 (recta) para los últimos puntos.

Además, se cumple que Pi(xi)=1y Pi(xj)=0 para cualquier j diferente de i.

- ***Método de los sistemas de ecuaciones***

El polinomio P(x) en un tramo [s_i, s_i+2] tiene la forma: P(x)=a_i + b_ix + $c_i x^2$

Cada tramo tiene un polinomio distinto, y necesitamos calcular a_i, b_i y c_i para cada intervalo. Para ello resolveremos el siguiente sistema de ecuaciones, en el que conocemos los valores *s* y *f*.

$P_1(x) = a_1 + b_1x + c_1x^2$

$$\begin{cases} a_1+b_1S_1+c_1S_1^2=f_1 \\ a_1+b_1S_2+c_1S_2^2=f_2 \\ a_1+b_1S_3+c_1S_3^2=f_3 \end{cases}$$

$$u(x) = \begin{cases} p^{(1)}(x)\, , x \in [S_1, S_3] \\ p^{(2)}(x)\, , x \in [S_3, S_5] \\ p^{(3)}(x)\, , x \in [S_5, S_6] \end{cases}$$

Como tenemos un número par de punto de soporte, el ultimo polinomio es una recta que hacemos con los últimos dos puntos

- ***Método de las funciones de base***

La interpolación cuadrática por tramos usa la siguiente forma, donde las ϕi(x) son las funciones de base que son diseñadas de forma que:

- ϕ0(x) es 1 en x0 y 0 en los otros puntos.
- ϕ1(x) es 1 en x1 y 0 en los otros puntos.
- ϕ2(x) es 1 en x2 y 0 en los otros puntos.

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \cdot \phi_i(x)$$

Habrá que calcular tantas funciones base como puntos del soporte halla.

La forma general de las funciones de base para la interpolación cuadrática por tramos puede ser construida como:

$$L_1(x) = \begin{cases} \dfrac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}, x \in [x_1, x_3] \\ 0, x \in [x_3, x_n] \end{cases}$$

$$L_2(x) = \begin{cases} \dfrac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}, x \in [x_1, x_3] \\ 0, x \in [x_3, x_n] \end{cases}$$

$$L_3(x) = \begin{cases} \dfrac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}, x \in [x_1, x_3] \\ \dfrac{(x-x_4)(x-x_5)}{(x_3-x_5)(x_3-x_5)}, x \in [x_3, x_5] \\ 0, x \in [x_5, x_n] \end{cases}$$

Para cada intervalo se construye una función cuadrática que pasa por tres puntos consecutivos, usando las funciones de base:

f(x)= f(s1) · L1(x) + f(s2) · L2(x) + f(s3) · L3(x)

Para comprobar que habéis entendido la teoría os propongo que intentéis resolver los siguientes ejercicios propuestos por Virginia y los cuales también podéis encontrar en la presentación de clase:

EJERCICIO 1: interpolación por tramos de grado uno mediante sistemas de ecuaciones

Calcula la función $v(x)$ definida por tramos de grado 1 sobre el soporte $\{0,2,5,6\}$ que interpola a la función:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{7}{2}x^2 + \frac{13}{2}x + 3$$

SOLUCIÓN:

Primero determinamos las parejas de valores $\left(s_j, f(s_j)\right)$:

s_j	0	2	5	6
$f(s_j)$	3	6	10.5	24

Para I_1:

$$\begin{cases} a_1 = \dfrac{s_1 f(s_0) - s_0 f(s_1)}{s_1 - s_0} = \dfrac{2\cdot 3 - 0\cdot 6}{2-0} = 3 \\ b_1 = \dfrac{f(s_1) - f(s_0)}{s_1 - s_0} = \dfrac{6-3}{2-0} = \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

Para I_2:

$$\begin{cases} a_2 = \dfrac{s_2 \cdot f(s_1) - s_1 f(s_2)}{s_2 - s_1} = \dfrac{5\cdot 6 - 2\cdot 10.5}{5-2} = \dfrac{9}{5-2} = 3 \\ b_2 = \dfrac{f(s_2) - f(s_1)}{s_2 - s_1} = \dfrac{10.5 - 6}{5-2} = \dfrac{4.5}{3} = \dfrac{9}{6} \end{cases}$$

Para I_3:

$$\begin{cases} a_3 = \dfrac{s_3 \cdot f(s_2) - s_2 f(s_3)}{s_3 - s_2} = \dfrac{6\cdot 10.5 - 5\cdot 24}{6-5} = -57 \\ b_3 = \dfrac{f(s_3) - f(s_2)}{s_3 - s_2} = \dfrac{24 - 10.5}{6-5} = \dfrac{27}{2} \end{cases}$$

$$\boxed{v(x) = \begin{cases} p^{(1)}(x) = 3 + \dfrac{3}{2}x & \text{si } x \in [0,2] \\ p^{(2)}(x) = 3 + \dfrac{3}{2}x & \text{si } x \in \,]2,5] \\ p^{(3)}(x) = -57 + \dfrac{27}{2}x & \text{si } x \in \,]5,6] \end{cases}}$$

EJERCICIO 2: interpolación por tramos de grado 2 mediante funciones de base

Determina las funciones de la base en $\mathcal{L}_2(\Delta)$ del ejercicio 4 y dibújalas aproximadamente

	s_0	s_1	s_2	s_3	s_4
s_j	-3	-1	0	1	3

I_1 I_2

SOLUCIÓN:

Las bases únicamente dependen de los valores del soporte y la selección de intervalos. Tenemos que determinar 5 funciones base (una por elemento del soporte):

$\varphi_0(x)$ es la primera función de la base, correspondiente al intervalo I_1:

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} \mathrm{L}_0^{(1)}(x) \text{ si } x \in [s_0, s_2] \\ 0 \quad \text{en el resto} \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{(x+1)x}{6} & \text{si } x \in [-3,0] \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

$$\mathrm{L}_0^{(1)}(x) = \frac{(x - s_{2\cdot 1-1})(x - s_2)}{(s_{2\cdot 1-2} - s_{2\cdot 1-1})(s_{2\cdot 1-2} - s_{2\cdot 1})} = \frac{(x - s_1)(x - s_2)}{(s_0 - s_1)(s_0 - s_2)} = \frac{(x+1)x}{-2\cdot(-3)} = \frac{(x+1)x}{6}$$

$\varphi_1(x)$ es una función de la base Índice IMPAR, correspondiente al intervalo I_1:

$$\varphi_1(x)=\varphi_{2\cdot 1-1}(x)=\begin{cases}\mathrm{L}_1^{(1)}(x) & \text{si } x\in\,]s_{2\cdot1-2},s_{2\cdot1}]\\ 0 & \text{en el resto}\end{cases}$$
$$=\begin{cases}\dfrac{(x+3)x}{-2} & \text{si } x\in[-3{,}0]\\ 0 & \text{en el resto}\end{cases}$$

$$\mathrm{L}_1^{(1)}(x)=\frac{(x-s_{2\cdot1-2})(x-s_{2\cdot1})}{(s_{2\cdot1-1}-s_{2\cdot1-2})(s_{2\cdot1-1}-s_{2\cdot1})}=\frac{(x-s_0)(x-s_2)}{(s_1-s_0)(s_1-s_2)}=\frac{(x+3)x}{(2)(-1)}=\frac{(x+3)x}{-2}$$

$\varphi_2(x)$ es una función Índice PAR de la base, correspondiente al intervalo I_1:

$$\varphi_2(x)=\varphi_{2j}(x)=\begin{cases}\mathrm{L}_2^{(j)}(x) & \text{si } x\in\,]s_{2j-2},s_{2j}]\\ \mathrm{L}_0^{(j+1)}(x) & \text{si } x\in\,]s_{2j},s_{2j+2}]\\ 0 & \text{en el resto}\end{cases}$$
$$=\begin{cases}\dfrac{(x+3)(x+1)}{3} & \text{si } x\in[-3{,}0]\\ \dfrac{(x-1)(x-3)}{3} & \text{si } x\in\,]0{,}3]\\ 0 & \text{en el resto}\end{cases}$$

$$\mathrm{L}_2^{(j)}(x)=\frac{(x-s_{2j-2})(x-s_{2j-1})}{(s_{2j}-s_{2j-2})(s_{2j}-s_{2j-1})}=\frac{(x-s_0)(x-s_1)}{(s_2-s_0)(s_2-s_1)}=\frac{(x+3)(x+1)}{3\cdot1}=\frac{(x+3)(x+1)}{3}$$

$$\mathrm{L}_0^{(j+1)}(x)=\frac{(x-s_{2(j+1)-1})(x-s_{2(j+1)})}{(s_{2(j+1)-2}-s_{2(j+1)-1})(s_{2(j+1)-2}-s_{2(j+1)})}=\frac{(x-s_3)(x-s_4)}{(s_2-s_3)(s_2-s_4)}=\frac{(x-1)(x-3)}{(-1)(-3)}$$

$\varphi_3(x)$ es una función Índice IMPAR de la base, correspondiente al intervalo I_2:

$$\varphi_3(x)=\varphi_{2\cdot 2-1}(x)=\begin{cases}\mathrm{L}_1^{(2)}(x) & \text{si } x\in\,]s_{2\cdot2-2},s_{2\cdot2}]\\ 0 & \text{en el resto}\end{cases}$$
$$=\begin{cases}\dfrac{x(x-3)}{-2} & \text{si } x\in\,]0{,}3]\\ 0 & \text{en el resto}\end{cases}$$

$$\mathrm{L}_1^{(2)}(x)=\frac{(x-s_{2\cdot2-2})(x-s_{2\cdot2})}{(s_{2\cdot2-1}-s_{2\cdot2-2})(s_{2\cdot2-1}-s_{2\cdot2})}=\frac{(x-s_2)(x-s_4)}{(s_3-s_2)(s_3-s_4)}=\frac{x(x-3)}{(1)(-2)}=\frac{x(x-3)}{-2}$$

$\varphi_4(x)$ es la última función de la base, correspondiente al intervalo I_2:

$$\varphi_4(x)=\varphi_{2m}(x)=\begin{cases}\mathrm{L}_2^{(m)}(x) \text{si } x\in\,]s_{2m-2},s_{2m}]\\ 0 \quad \text{en el resto}\end{cases}$$
$$=\begin{cases}\mathrm{L}_2^{(2)}(x) & \text{si } x\in\,]s_{2\cdot2-2},s_{2\cdot2}]\\ 0 & \text{en el resto}\end{cases}=$$

$$\mathrm{L}_2^{(2)}(x)=\frac{(x-s_{2\cdot2-2})(x-s_{2\cdot2-1})}{(s_{2\cdot2}-s_{2\cdot2-2})(s_{2\cdot2}-s_{2\cdot2-1})}=\frac{(x-s_2)(x-s_3)}{(s_4-s_2)(s_4-s_3)}=\frac{x(x-1)}{3\cdot2}$$