Polinomio interpolador de Lagrange $\Rightarrow \left[P(x) = \sum_{i=1}^{n} f(s_i)\cdot L_i(x)\right] \left[L_i(x) = \prod_{\substack{j=1\\ j\neq 1}}^{n} \frac{x - s_j}{s_i - s_j}\right]$ Ejemplo $L_1(x) = \frac{(x-s_2)(x-s_3)}{(s_1-s_2)(s_1-s_3)}$

Fórmulas de Newton $\Rightarrow \left[P(x) = f[s_0] + f[s_0, s_1](x-s_0) + f[s_0,s_1,s_2](x-s_0)(x-s_1)\right] \left[f[s_0,s_1,s_2] = \frac{f[s_1,s_2] - f[s_0,s_1]}{s_2 - s_0}\right]$

$$\left[\begin{array}{cccc} & j=0 & j=1 & j=2 \\ s_0 & f[s_0] & f[s_0,s_1] & f[s_0,s_1,s_2] \\ s_1 & f[s_1] & f[s_1,s_2] & \\ s_2 & f[s_2] & & \end{array}\right] \left[f[s_0,s_1,\dots,s_n] = \frac{f[s_1,s_2,s_n] - f[s_0,s_1,s_{n-1}]}{s_n - s_0}\right]$$

Sistema de ecuaciones $\Rightarrow \left[P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \dots\right] \rightarrow$ Matriz $\rightarrow \left[\begin{pmatrix} s_0^0 & s_0^1 & s_0^2 \\ s_1^0 & s_1^1 & s_1^2 \\ s_2^0 & s_2^1 & s_2^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(s_0) \\ f(s_1) \\ f(s_2) \end{pmatrix}\right]$

Derivación

$\left[f^{(k)}(x^*) = \sum_{i=0}^{n} c_i \cdot f(s_i)\right] \left[c_i = L_i^{(k)}(x^*)\right]$ $\sum c_i = 0$

- Con Lagrange $\Rightarrow$ construyes bases $\Rightarrow$ las derivas $\Rightarrow$ sustituyes en el punto para obtener los coeficientes $\Rightarrow$ construyes polinomio.
- Con Newton $\Rightarrow$ Construyes el polinomio con la fórmula $\Rightarrow$ derivas el polinomio $\Rightarrow$ sustituyes en el punto
- Coeficientes indeterminados $\Rightarrow \left[s_i = x^* + \theta h\right]$ $x^* \equiv$ dónde derivamos; $s_i \equiv$ soporte; $\theta \equiv$ se calcula; $h \equiv$ distancia mínima entre x^* y $s \neq 0$; $k \equiv$ orden derivada

$$\left[\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \theta_0 & \theta_1 & \dots & \theta_n \\ \theta_0^k & \theta_1^k & \dots & \theta_n^k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ k! \end{bmatrix}\frac{1}{h^k}\right]$$

Ejemplo $\Rightarrow$ me dan soporte $\Rightarrow$ pasos:

1. Calculo θ con la ecuación (antes hay que calcular h con x^* y el soporte cercano
2. Relleno la matriz
3. Invierto y resuelvo

Integración

$\left[\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)\right] \equiv$ Barrow

- Conociendo el polinomio interpolador $\Rightarrow \left[\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{j=0}^{n} \int_a^b f(s_j) L_j(x)\,dx = \sum_{j=0}^{n} f(s_j) \int_a^b L_j(x)\,dx = \sum_{j=0}^{n} c_j \cdot f(s_j)\right]$ $\left[c_j = \int_a^b L_j(x)\,dx\right]$ $\left[\sum_{j=0}^{n} c_j = b - a\right]$
- 1 valor de soporte $\Rightarrow \left[L_0(x) = 1\right] \left[\int_a^b f(x)\,dx \approx (b-a) f(s_0)\right]$
  - $\rightarrow$ Rect. izq $\rightarrow s_0 = a$
  - $\rightarrow$ Rect. dcha $\rightarrow s_0 = b$
  - $\rightarrow$ Rect. medio $\rightarrow s_0 = \frac{a+b}{2}$

  RECTÁNGULO

  $\boxed{\text{GRADO = SOPORTE} - 1}$

- 2 valores de soporte $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} L_0(x) = \frac{x - s_1}{s_0 - s_1} \\ L_1(x) = \frac{x - s_0}{s_1 - s_0} \end{array}\right] \left[\int_a^b f(x)\,dx \approx c_0 f(s_0) + c_1 f(s_1)\right]$

  TRAPECIO

  Si $a = s_0$ y $b = s_1 \rightarrow$ TRAPECIO $\rightarrow \left[\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b))\right]$

- 3 valores de soporte (equiespaciados) $\Rightarrow$ $s_0 = a$, $s_1 = \frac{a+b}{2}$, $s_2 = b$ $\Rightarrow c_0 = \frac{b-a}{6}$, $c_1 = \frac{4(b-a)}{6}$, $c_2 = \frac{b-a}{6}$ $\Rightarrow$ simpson $\left[\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4 f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right)\right]$

  SIMPSON

- Cuadratura: coef indet:

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ s_0 & s_1 & s_2 & \dots & s_n \\ s_0^k & s_1^k & s_2^k & \dots & s_n^k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b-a \\ (b^2-a^2)/2 \\ \vdots \\ (b^k-a^k)/k \end{pmatrix}\right]$$

- Newton-Cotes: equiespaciado

$$\left[\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{D}\sum_{j=0}^{n} \alpha_j f(s_j)\right] \qquad \left[s_j = a + jh\right]$$

h:
- Cerrado $\Rightarrow \left[h = \frac{b-a}{n}\right]$
- Abierto $\Rightarrow \left[h = \frac{b-a}{n+2}\right]$

Newton-Cotes cerrado a •—• b

n	α_j							D	Nombre
1	1	1						2	Trapecio
2	1	4	1					6	Simpson
3	1	3	3	1				8	Regla del 3/8
4	7	32	12	32	7			90	Milne
5	19	75	50	50	75	19		288	
6	41	216	27	272	27	216	41	840	Weddle

Newton-Cotes abierto a o—o b

n	α_j				D	Nombre
0	1				1	Punto medio
1	1	1			2	
2	2	-1	2		3	
3	11	1	1	11	24	

Integración por tramos

- Soporte equiespaciado
  ↳ Newton-Cotes cerrado
- Soporte no equiespaciado
  ↳ Tabla coef. indet.

- Gauss-Legendre $\Rightarrow$ soporte no equiespaciado.

[-1,1]	P_1	P_2	P_3	P_4
ε	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$; $\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\sqrt{\frac{3}{5}}$; 0 ; $\sqrt{\frac{3}{5}}$	$-\sqrt{\frac{30+\sqrt{480}}{70}}$; $-\sqrt{\frac{30+\sqrt{480}}{70}}$; $\varepsilon_3 = -\varepsilon_2$; $\varepsilon_4 = -\varepsilon_1$
γ	2	1 ; 1	$\frac{5}{9}$; $\frac{8}{9}$; $\frac{5}{9}$	$\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{5}{216}}$; $\frac{5+\sqrt{270}}{6\sqrt{30}}$; " ; "

$$\left[\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2}\sum_{j=1}^{n} \gamma_j f(s_j)\right]$$

$$\left[s_j = \frac{a+b}{2} + \frac{(b-a)}{2}\varepsilon_j\right]$$

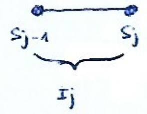
Interpolación por tramos

- **Grado 1:** 2 puntos de soporte

↳ m sistemas de ecuaciones ⇒ $\left[p^{(j)}(x) = a_j + b_j x \ , \ x \in \left]s_{j-1}, s_j\right]\right]$ → $\left[\begin{cases} a_j = \dfrac{s_j \cdot f(s_{j-1}) - s_{j-1} f(s_j)}{s_j - s_{j-1}} \\ b_j = \dfrac{f(s_j) - f(s_{j-1})}{s_j - s_{j-1}} \end{cases}\right]$

↳ Bases de Newton ⇒ $\left[v(x) \Rightarrow p^{(j)}(x) = f[s_{j-1}] + f[s_{j-1}, s_j](x - s_{j-1}) \quad x \in [s_{j-1}, s_j]\right]$

↳ Bases de Lagrange ⇒ $\left[v(x) = \sum_{j=0}^{m} f(s_j) \cdot \varphi_j(x)\right]$ $\left[p^{(j)}(x) = f(s_{j-1}) L_0^{(j)} + f(s_j) L_1^{(j)}\right]$



$\varphi_0 \begin{cases} \dfrac{x - s_1}{s_0 - s_1} & x \in [s_0, s_1] \\ 0 & \text{en resto} \end{cases}$

$\varphi_j \begin{cases} \dfrac{x - s_{j-1}}{s_j - s_{j-1}} & x \in [s_{j-1}, s_j] \\ \dfrac{x - s_{j+1}}{s_j - s_{j+1}} & x \in [s_j, s_{j+1}] \end{cases}$

$\varphi_m \begin{cases} \dfrac{x - s_{m-1}}{s_m - s_{m-1}} & x \in [s_{m-1}, s_m] \end{cases}$

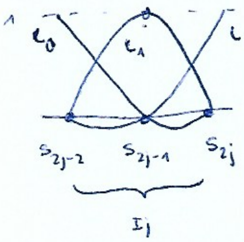
- **Grado 2:** 3 puntos de soporte

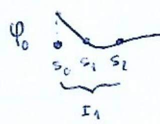
↳ m sistemas de ecuaciones ⇒ $\left[p^{(j)}(x) = a_j + b_j x + c_j x^2 \ , \ x \in \left]s_{2j-2}, s_{2j}\right]\right]$ ⇒ $\begin{cases} f(s_{2j-2}) = p^{(j)}(s_{2j-2}) = a_j + b_j s_{2j-2} + c_j (s_{2j-2})^2 \\ f(s_{2j-1}) = p^{(j)}(s_{2j-1}) = a_j + b_j s_{2j-1} + c_j (s_{2j-1})^2 \\ f(2j) = p^{(j)}(s_{2j}) = a_j + b_j s_{2j} + c_j (s_{2j})^2 \end{cases}$

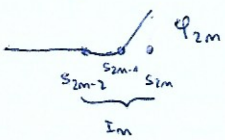
↳ Newton ⇒ $\left[p^{(j)}(x) = f[s_{2j-2}] + f[s_{2j-2}, s_{2j-1}](x - s_{2j-2}) + f[s_{2j-2}, s_{2j-1}, s_{2j}](x - s_{2j-2})(x - s_{2j-1})\right]$

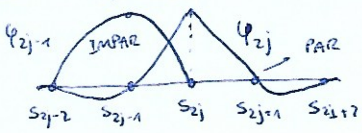
↳ Lagrange ⇒ $\left[v(x) = \sum_{j=0}^{2m} f(s_j) \varphi_j(x)\right]$ $\left[p^{(j)}(x) = f(s_{2j-2}) L_0^{(j)}(x) + f(s_{2j-1}) L_1^{(j)}(x) + f(s_{2j}) L_2^{(j)}(x)\right]$

La base inicial, las de en medio y la final con 1 operación. Las de enlace con 2 operaciones. *









* Al final se suman los de los mismos intervalos.

- **General**

↳ sistema de ecuaciones ⇒ $\begin{pmatrix} 1 & s_0^{(j)} & (s_0^{(j)})^2 & (s_0^{(j)})^{n_j} \\ 1 & s_1^{(j)} & (s_1^{(j)})^2 & (s_1^{(j)})^{n_j} \\ 1 & s_{n_j}^{(j)} & (s_{n_j}^{(j)})^2 & (s_{n_j}^{(j)})^{n_j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0^{(j)} \\ a_1^{(j)} \\ a_n^{(j)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(s_0^{(j)}) \\ f(s_1^{(j)}) \\ f(s_{n_j}^{(j)}) \end{pmatrix}$

$v^{(j)}(x) = a_0^{(j)} + a_1^{(j)} x + a_2^{(j)} x^2 + a_{n_j}^{(j)} x^{n_j}$

↳ Newton ⇒ $\left[v^{(j)}(x) = f[s_0^{(j)}] + \sum_{k=1}^{n_j} f[s_0^{(j)}, s_1^{(j)}, \ldots, s_k^{(j)}] \prod_{i=0}^{k-1} (x - s_i^{(j)})\right]$

↳ Lagrange ⇒ como antes. La inicial, del medio y final con 1 operación. Las de enlace 2.

$\int x^n = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$

$\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x$

$\int u \, dv = uv - \int v \, du$

$\int \dfrac{1}{x} = \ln x$

$\int \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}} = \arccos x$

$\int e^x = e^x$

$\int \dfrac{f'(x)}{f(x)} = \ln f(x)$

$\int \dfrac{1}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x$

$\int \sec^2 x = \tan x$

$\int \cos x = \operatorname{sen} x$

$\int a^x \, dx = \dfrac{a^x}{\ln a}$

$\int \operatorname{sen} x = -\cos x$