Segundo ejercicio del PEP 1 utilizando las diferencias divididas de Newton

Pregunta 2 (5 puntos sobre 10):
Un laboratorio farmacéutico está estudiando los efectos de un medicamento en el cuerpo humano a lo largo del tiempo. Para ello, se ha medido la concentración del medicamento en sangre (en mg/L) en diferentes momentos después de su administración inicial a 50 pacientes diferentes. Además, se ha monitorizado el número de latidos por minuto (frecuencia cardíaca) de estos mismos sujetos.

En promedio, para todos los individuos, se han obtenido los siguientes datos:

Tiempo (horas)	Concentración (mg/L)	Frecuencia cardiaca (lpm)
0	50	78
1	35	76
3	20	75
4	5	76

a) Encuentra el polinomio interpolador de Lagrange que describe la concentración del medicamento en función del tiempo usando la tabla de diferencias divididas de Newton. (1.50 puntos)

b) Encuentra el polinomio interpolador de Lagrange para la frecuencia cardíaca (puedes emplear el método que consideres conveniente). (1.50 puntos)

c) Utiliza el polinomio interpolador para estimar la concentración del medicamento a las 2 horas. (0.75 puntos)

d) Aporta una aproximación de la concentración del medicamento en sangre para un instante en el que, en promedio, se han obtenido 77 pulsaciones por minuto entre los individuos involucrados en el experimento. (1.25 puntos)

Resolución

a) Encuentra el polinomio interpolador de Newton para la concentración del medicamento

Usamos los puntos correspondientes a la concentración del medicamento:

$(s_0, f[s_0]) = (0, 50), (s_1, f[s_1]) = (1, 35), (s_2, f[s_2]) = (3, 20), (s_3, f[s_3]) = (4, 5)$

Cálculamos las diferencias divididas de la concentración para construir la tabla:

- $f[s_0, s_1] = (f[s_1] - f[s_0]) / (s_1 - s_0) = (35 - 50) / (1 - 0) = -15$
- $f[s_1, s_2] = (f[s_2] - f[s_1]) / (s_2 - s_1) = (20 - 35) / (3 - 1) = -7.5$
- $f[s_2, s_3] = (f[s_3] - f[s_2]) / (s_3 - s_2) = (5 - 20) / (4 - 3) = -15$
- $f[s_0, s_1, s_2] = (f[s_1, s_2] - f[s_0, s_1]) / (s_2 - s_0) = (-7.5 - (-15)) / (3 - 0) = 2.5$
- $f[s_1, s_2, s_3] = (f[s_2, s_3] - f[s_1, s_2]) / (s_3 - s_1) = (-15 - (-7.5)) / (4 - 1) = -2.5$
- $f[s_0, s_1, s_2, s_3] = (f[s_1, s_2, s_3] - f[s_0, s_1, s_2]) / (s_3 - s_0) = (-2.5 - 2.5) / (4 - 0) = -1.25$

Primero, construimos la tabla de diferencias divididas:

s_i	$f[s_i]$	$f[s_i, s_{i+1}]$	$f[s_i, s_{i+1}, s_{i+2}]$	$f[s_i, s_{i+1}, s_{i+2}, s_{i+3}]$
0	50	-15	2.5	-1.25
1	35	-7.5	-2.5	
3	20	-15		
4	5			

El polinomio tiene la forma:

$P(x) = f[s_0] + f[s_0, s_1](x - s_0) + f[s_0, s_1, s_2](x - s_0)(x - s_1) + f[s_0, s_1, s_2, s_3](x - s_0)(x - s_1)(x - s_2)$

Sustituimos los valores:

$P(x) = 50 - 15(x - 0) + 2.5(x - 0)(x - s_1) - 1.25(x - 0)(x - s_1)(x - s_2)$

Simplificando:

$P(x) = 50 - 15x + 2.5x(x - 1) - 1.25x(x - 1)(x - 3)$

b) Encuentra el polinomio interpolador para la frecuencia cardíaca

Los puntos para la frecuencia cardíaca son:

$(s_0, f[s_0]) = (0, 78)$, $(s_1, f[s_1]) = (1, 76)$, $(s_2, f[s_2]) = (3, 75)$, $(s_3, f[s_3]) = (4, 76)$

Cálculamos las diferencias divididas de la frecuencia cardíaca para crear la tabla:

- $f[s_0, s_1] = (f[s_1] - f[s_0]) / (s_1 - s_0) = (76 - 78) / (1 - 0) = -2$
- $f[s_1, s_2] = (f[s_2] - f[s_1]) / (s_2 - s_1) = (75 - 76) / (3 - 1) = -0.5$
- $f[s_2, s_3] = (f[s_3] - f[s_2]) / (s_3 - s_2) = (76 - 75) / (4 - 3) = 1$
- $f[s_0, s_1, s_2] = (f[s_1, s_2] - f[s_0, s_1]) / (s_2 - s_0) = (-0.5 - (-2)) / (3 - 0) = 0.5$
- $f[s_1, s_2, s_3] = (f[s_2, s_3] - f[s_1, s_2]) / (s_3 - s_1) = (1 - (-0.5)) / (4 - 1) = 0.5$
- $f[s_0, s_1, s_2, s_3] = (f[s_1, s_2, s_3] - f[s_0, s_1, s_2]) / (s_3 - s_0) = (0.5 - 0.5) / (4 - 0) = 0$

Construimos la tabla de diferencias divididas:

s_i	$f[s_i]$	$f[s_i, s_{i+1}]$	$f[s_i, s_{i+1}, s_{i+2}]$	$f[s_i, s_{i+1}, s_{i+2}, s_{i+3}]$
0	78	-2	0.5	0
1	76	-0.5	0.5	
3	75	1		
4	76			

El polinomio tiene la forma:

$P(x) = f[s_0] + f[s_0, s_1](x - s_0) + f[s_0, s_1, s_2](x - s_0)(x - s_1)$

Sustituimos los valores:

$P(x) = 78 - 2(x - 0) + 0.5(x - 0)(x - s_1)$

Simplificando:

$P(x) = 78 - 2x + 0.5x(x - 1)$

$P(x) = 78 – 2.5x + 0.5x^2$

c) Estima la concentración del medicamento a las 2 horas ($x = 2$)

Sustituimos $x = 2$ en el polinomio del apartado a:

$P(x) = 50 - 15x + 2.5x(x - 1) - 1.25x(x - 1)(x - 3)$

Sustituimos $x = 2$:

$P(2) = 50 - 15(2) + 2.5(2)(2 - 1) - 1.25(2)(2 - 1)(2 - 3)$

Resolviendo paso a paso:

$P(2) = 50 - 30 + 2.5(2)(1) - 1.25(2)(1)(-1)$

$P(2) = 50 - 30 + 5 + 2.5 = 27.5$ mg/L

d) Aproximación de la concentración para f[s] = 77

Primero debemos determinar el tiempo en que la frecuencia cardiaca promedio es de 77 ppm, utilizando el polinomio interpolador de la frecuencia cardiaca:

Usamos el polinomio de la frecuencia cardíaca:

$P(x) = 78 - 2x + 0.5x(x - 1)$

- Sustituyendo $f[s] = 77$:

$77 = 78 - 2x + 0.5x(x - 1)$

- Resolviendo:

$77 = 78 - 2x + 0.5(x^2 - x)$

$0 = 1 - 2x + 0.5x^2 - 0.5x$

$x^2 - 5x + 2 = 0$

Resolviendo la ecuación cuadrática:

$x = [5 \pm \sqrt{(5^2 - 4(1)(2))}] / (2(1))$

$x = [5 \pm \sqrt{(25 - 8)}] / 2$

$x = [5 \pm \sqrt{17}] / 2$

Aprox: $x \approx 4,56$ o $x \approx 0,439$

Observamos que el intervalo del polinomio interpolado es [0,4], por lo que el valor de 4,56 no es válido, entonces nos quedamos con la segunda solución.

Por último, debemos evaluar la concentración del medicamente para este instante de tiempo con el polinomio interpolador para la concentración:

$f[0{,}439] \approx 42{,}0109$ mg/L